suite (La Séance de T.D de 30-31/03/2020)

Exercice 4
On considére la suite numérique définie par la récurrence:

$$U_n = \frac{1}{2}(U_{n-1} + U_{n-2}) \qquad n \geq 2$$

U_0 et U_1 sont deux réels donnés
En étudiant la série de terme général $V_n = U_{n+1} + U_n$,montre que la suite $(U_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

Solution
On a
$V_n = U_{n+1} + U_n = \frac{1}{2}((U_{n-1} + U_{n-2}) - U_n = \frac{1}{2}(U_{n-1} - U_n)$
D'où $V_n = -\frac{1}{2}V_{n-1}$
De même $V_{n-1} = -\frac{1}{2}V_{n-2}$
Ainsi

$$V_n = (-\frac{1}{2})^n V_0$$

On en déduit que $\sum V_n$ est une série géométrique convergente, de somme $S = \frac{2}{3}V_0$

Comme $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_n = U_{n+1} - U_0$. la suite (U_n) est convergente de limite l
Alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} - U_0 = \lim_{n\to+\infty} U_n - U_0$$

Donc

$$l = S + U_0 = \frac{2}{3}(U_1 - U_0) + U_0 = \frac{1}{3}(2U_1 + U_0)$$

Exercice 5
Déterminer la nature des séries $\sum U_n$ et $\sum V_n$ et calculer leur somme quand elles convergent:

1. $U_n = \frac{n}{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}$
2. $V_n = \frac{1}{(n-1)n(n+1)}, \qquad n \geq 2$

Solution
1) On a $U_n = \frac{n}{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1 \neq 0$, alors $\sum U_n$ est divergente.
2) On a $V_n = \frac{1}{(n-1)n(n+1)}, \qquad n \geq 2$
On écrire V_n sos la formme $V_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}$
Donc par identification on a $V_n = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)}$
Alors

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{n} V_k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(n-1)} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(n+1)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})
\end{aligned}$$

Alors la série $\sum_{n=2}^{+\infty} V_n$ est convergente de somme $\frac{1}{4}$

Exercice 6
calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{n!}$, sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$

Solution

Remarquons d'abord que cette série est convergente (en utilisant le critère de D'Alenbert) En effet si $U_n = \frac{n(n+1)}{n!}$ alors $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+2}{n(n+1)}$ tend vers 0 quand n tend vres $+\infty$.
D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{n!} &= \frac{n^2}{n!} + \frac{n}{n!}\\ &= \frac{n-1+1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}\\ &= \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!}\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{(n!)} &= 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{(n!)}\\ &= 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)!}\\ &= 2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + 2(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n!} - 1)\\ &= 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

par conséquent

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{(n!)} = 3e$$

.

Exercice 7

On considére la série de terme général:

$$U_n = \frac{2n}{n^4 + 3n^2 + 4}$$

1. *vérifier que cette série converge.*
2. **I** *Factoriser $n^4 + 3n^2 + 4$ dans $\mathbb{N}$*

   II *En déduire que $U_n = f(n - \frac{1}{2}) - f(n + \frac{1}{2})$ où f est une fonction à déterminer.*
3. *Calculer la somme de cette série.*